ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

P – 20

ANALISIS KESULITAN BERPIKIR VISUAL DALAM MEMAHAMI DEFINISI FORMAL PADA BARISAN BILANGAN REAL

Darmadi [1], Agung Lukito [2], Ketut Budayasa [3]
[1] Mahasiswa Program Pascasarjana UNESA; [2] Staf Pengajar Program Pascasarjana UNESA; [3] Staf Pengajar Program Pascasarjana UNESA

Abstrak

Kesulitan belajar analisis real pada umumnya dimulai sejak awal yaitu sejak memahami definisi formal yang diberikan seperti pada materi barisan bilangan real. Untuk lebih memahami definisi formal pada barisan bilangan real, dapat digunakan visualisasi. Selain faktor dari individu, tingkat kesulitan definisi juga mempengaruhi ketika memahami. Kesulitan berpikir visual dalam memahami definisi formal pada barisan bilangan real perlu dianalisis dan diketahui.

Kata kunci: analisis kesulitan, berpikir visual, memahami, dan definisi formal

A. Pendahuluan

Analisis real merupakan suatu matakuliah wajib bagi mahasiswa program studi pendidikan matematika. Beberapa permasalahan muncul dalam pembelajaran analisis real; seperti: 1) Hasil belajar analisis real kurang memuaskan (Darmadi, 2008a), 2) Mahasiswa kesulitan belajar analisis real sulit sejak awal (Darmadi, 2008b), 3) Pemahaman mahasiswa terhadap definisi formal pada kalkulus kurang (Darmadi, 2009a); 4) Persiapan kuliah mahasiswa kurang dengan berbagai alasan seperti mendapat kurangnya waktu belajar, mengerjakan tugas dari dosen lain, sakit, hajatan, materi kurang menarik, dan kurang suka pada dosennya (Darmadi, 2009b).

Beberapa metode dan model pembelajaran dengan aneka media pembelajaran yang dianggap sesuai telah dicoba; seperti: pengembangan model pembelajaran analisis real berbasis teori David Tall (Darmadi, 2009b) dan penggunaan Lesson Study dalam pembelajaran analisis real (Darmadi, 2010). Meskipun demikian, kemampuan berpikir analitis, kreatif, kritis, dan inovatif masih perlu untuk selalu ditingkatkan (Darmadi, 2011a).

Salah satu contoh permasalahan yang muncul dalam pembelajaran analisis real pokok bahasan barisan bilangan real adalah memahami definisi barisan bilangan real konvergen. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan konvergen (ke a) jika dan hanya jika terdapat $a \in \boldsymbol{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ dengan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $|a_n - a| < \varepsilon$. Mengapa definisinya seperti itu? Mengapa harus ada a, ε, dan n_0? Bagaimana gambaran hubungan a, ε dan n_0? Mengapa menggunakan harga mutlak? dan sebagainya. Kita akan dapat menjawab pertanyaan tersebut dengan memvisualiasikan definisi formal tersebut.

Barisan bilangan real adalah fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real. Definisi-definisi pada barisan bilangan real, biasa disajikan dalam bentuk formal yaitu disajikan dengan simbol-simbol matematis. Selain itu, definisi barisan bilangan real diberikan untuk mahasiswa dimana menurut Piaget pada tingkat kognitif formal. Oleh karena itu, Tall dkk menyebut definisi seperti tersebut dengan definisi formal.

Memahami definisi formal merupakan suatu kegiatan berpikir tingkat tinggi. Dalam memahami definisi formal terdapat proses pengolahan informasi pada pikiran. Sesuai teori

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

penyandian-ganda, suatu informasi disandikan dalam dua cara yaitu penyandian verbal dan penyandian visual. Sebagian informasi disimpan dalam bentuk verbal dan sebagian disimpan dalam bentuk visual. Bagaimana mengolah dan memanfaatkan informasi visual untuk memahami definisi formal pada barisan bilangan real belum banyak diketahui.

Pemanfaatkan pengetahuan visual dalam pembelajaran analisis real jarang digunakan. Hasil tes kemampuan memahami definisi formal dan mengsketsa grafik menunjukkan bahwa kekayaan imajeri mahasiswa masih kurang (Darmadi, 2011b). Hal ini terjadi karena dalam pembelajaran sebelumnya kurang memanfaatkan gambar-gambar sebagai visualisasi dan masih terpaku pada formalitas atau menggunakan rumus-rumus saja.

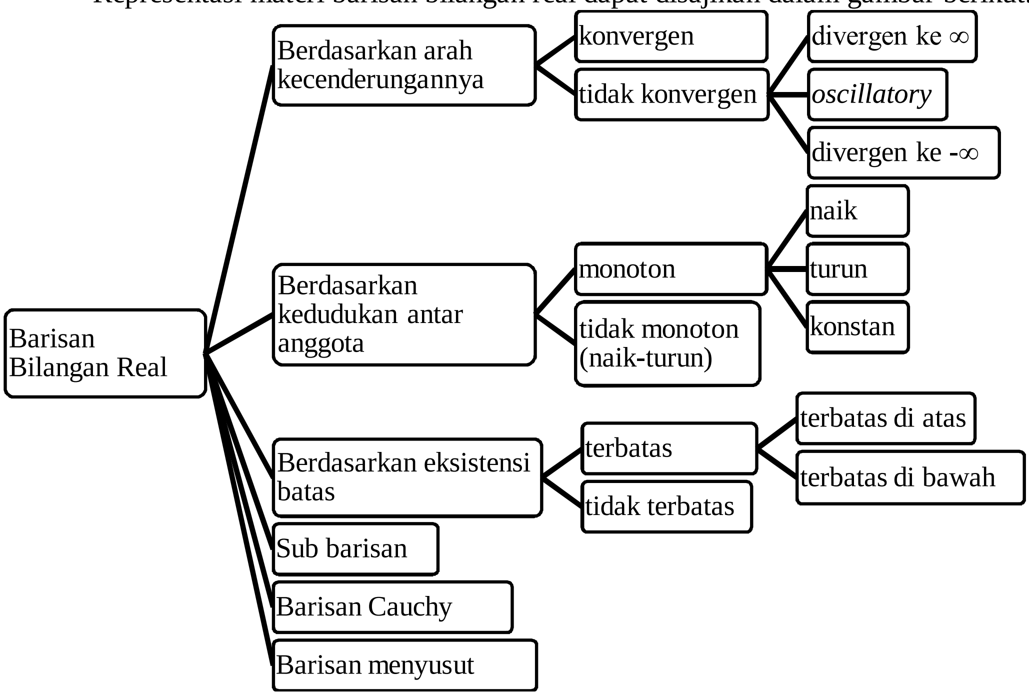
Berpikir dengan menggunakan informasi visual disebut berpikir visual. Bahan baku dari berpikir visual adalah bayangan mental (imajeri). Hasil berpikir visual berupa gambar/grafik. Perlu membangun pembelajaran matematika yang menyenangkan dengan visualisasi (Darmadi, 2012a).

Pepatah cina kuno mengatakan bahwa gambar dapat menyatakan seribu kata. Banyak ahli matematika yang menggunakan kemampuan imajeri (berpikir visual) dalam melakukan pekerjaan mereka. Suatu alternatif untuk memahami definisi-definisi formal pada pembelajaran barisan bilangan real yaitu dengan memvisualisasikannya (Darmadi, 2012b). Pada makalah ini dibahas analisis kesulitan berpikir visual dalam memahami definisi-definisi formal pada barisan bilangan real.

B. Pembahasan

Barisan bilangan real didefinisikan sebagai suatu fungsi dari bilangan asli ke bilangan real. Misalkan a_n adalah fungsi yang membentuk barisan bilangan real, maka barisan bilangan real tersebut disajikan dalam bentuk $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oleh Goldberg (1976), (a_n) oleh Bartle & Sherbet (1982), dan $\langle a_n \rangle$ oleh Wasan & Prakash. Simbol untuk menyatakan barisan bilangan real tiap buku acuan dapat berbeda. Pada pembahasan ini, barisan bilangan real dinotasikan dengan $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

Representasi materi barisan bilangan real dapat disajikan dalam gambar berikut.



Gambar 1. Hubungan materi barisan bilangan real

Untuk mempersingkat istilah, barisan bilangan real selanjutnya disebut barisan.

Berdasarkan arah kecenderungan dari anggotanya, dikenal barisan konvergen, divergen ke ∞, divergen ke $-\infty$, dan *oscillatori*. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan konvergen jika dan hanya

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

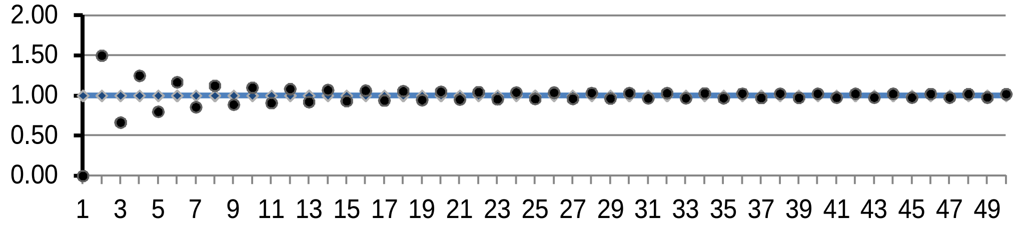
jika terdapat $a \in \boldsymbol{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ dengan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $|a_n - a| < \varepsilon$. Untuk menjelaskan pemahaman terhadap definisi tersebut secara formal, maka mahasiswa akan memberikan contoh. Sebagai contoh barisan konvergen yang digunakan pada pembahasan ini adalah $\left\{1 + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$.

Langkah berikutnya, tentu mendaftar keanggotaan barisan tersebut. Berikut yang biasa digunakan mahasiswa untuk mendaftar keanggotaan suatu barisan.

N		Manipulasi		Hasil
1	$\rightarrow$	$1 + (-1)^1\left(\frac{2.1+1}{1}\right)$	=	0.00
2	$\rightarrow$	$1 + (-1)^2\left(\frac{2.2+1}{2}\right)$	=	1.50
3	$\rightarrow$	$1 + (-1)^3\left(\frac{2.3+1}{3}\right)$	=	0.66
4	$\rightarrow$	$1 + (-1)^4\left(\frac{2.4+1}{4}\right)$	=	1.25
5	$\rightarrow$	$1 + (-1)^5\left(\frac{2.5+1}{5}\right)$	=	0.80
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Semakin banyak suku barisan yang diketahui, semakin memberikan gambaran secara intuisi menuju kemana barisan tersebut. Waktu yang diperlukan antar mahasiswa dapat berbeda tergantung pada kemampuan dan teknik yang digunakan.

Beberapa mahasiswa mungkin sudah dapat mengetahui kemana arah barisan tersebut. Namun untuk menjelaskan bagaimana mengetahuinya dan menjelaskan secara visual maka perlu visualisasi barisan tersebut. Berikut adalah visualisasi dari barisan tersebut dengan menggunakan program excel.



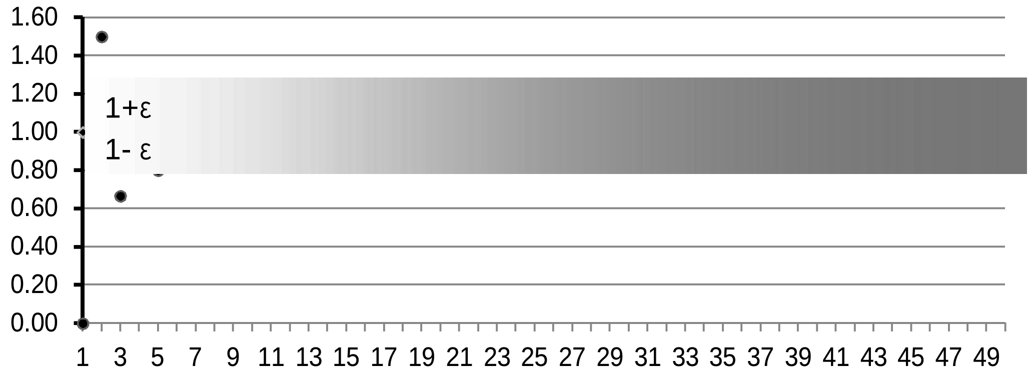
Gambar 2. Visualisasi barisan konvergen

Mahasiswa harus mengingat terlebih dahulu bahwa barisan bilangan real merupakan suatu fungsi dari bilangan asli ke bilangan real. Oleh karena itu, barisan bilangan real mestinya juga dapat digambarkan dengan domain himpunan bilangan asli dan kodomain himpunan bilangan real. Kemampuan kalkulus dalam mengambar grafik sangat dibutuhkan disini. Beberapa kesalahan yang sering dilakukan adalah skala untuk kodomain dibuat fleksibel karena untuk menggambarkan keanggotaan antar suku memerlukan tempat. Akibatnya, tidak tampak menuju ke arah mananya barisan tersebut. Kesalahan yang lain adalah mengubungkan antar titik-titik anggota barisan karena terbiasa menggambar fungsi real kontinu dalam kalkulus. Sebenarnya hal ini juga dapat memperjelas jejak arah dari barisan bilangan real tersebut, namun salah dari tinjauan filosofi matematis. Kesalahan yang lain adalah mahasiswa terpaku pada grafik linear. Sampai tahap ini, mahasiswa dapat menjelaskan arah kekonvergenan dari suatu barisan bilangan real. Namun belum menjelaskan kesesuaian dengan definisi formal. Arah kekonvergenan sudah nampak yaitu ke suatu $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Untuk menjelaskan pernyataan berikutnya yaitu: sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ dengan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $|a_n - a| < \varepsilon$, perlu pendalaman kembali. Mahasiswa harus mengingat kembali tentang $\varepsilon > 0$ yang sudah dijelaskan sebagai suatu jarak persekitaran. Selain itu melihat bahwa $|a_n - a| < \varepsilon$ menunjukkan persekitaran α

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

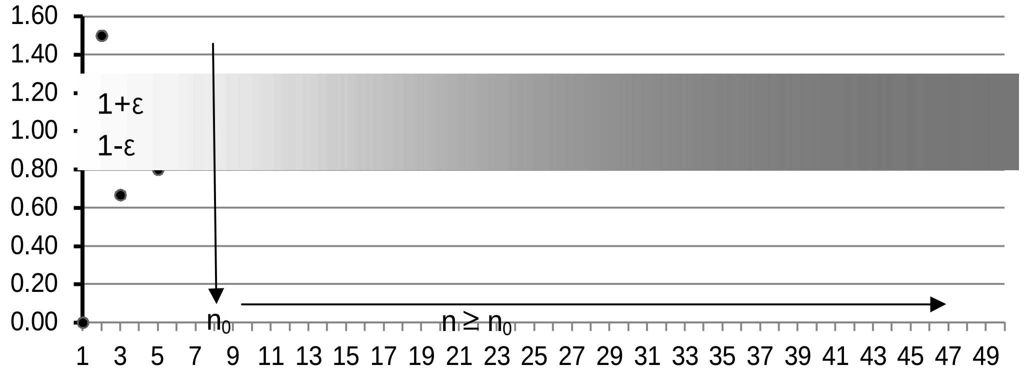
yaitu $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ karena $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Sehingga langkah berikutnya menjelaskan peran $\varepsilon > 0$ secara visual.



Gambar 3. Visualisasi menentukan dan memberi garis a dan ε

Posisi ε untuk beberapa mahasiswa masih di domain tanpa memperhatikan α. Hal ini terjadi karena mahasiswa belum paham benar tentang maksud ε sebagai notasi jarak persekitaran dari α. Selain itu perlu menjelaskan persekiratan a tersebut dan kemudian mengabsir untuk penjelasan berikutnya.

Berkutnya menjelaskan hubungan pernyataan untuk setiap $\varepsilon > 0$ dengan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $|a_n - a| < \varepsilon$. yaitu



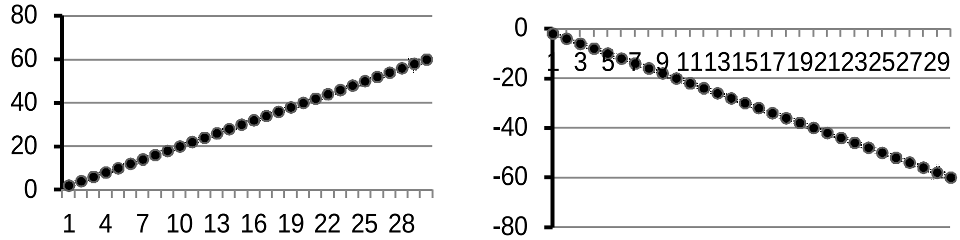
Gambar 4 Visualisasi menentukan dan memberi garis n_0

Untuk penjelaskan ini perlu dilakukan pengecekan pemahaman seperti jika ε diambil 1 berpakah n_0 yang dapat diambil? jika ε diambil ½ berpakah n_0 yang dapat diambil? atau format lain jika ε diambil ¼ apakah n_0 = 3 atau 100 atau yang lain dapat diambil untuk membuktikan bahwa barisan tersebut konvergen? Pemahaman ini sekaligus menjawab pertanyaan beberapa mahasiswa tentang hubungan antara ε dengan n_0.

Pemahaman tersebut masih untuk menjelaskan satu contoh barisan konvergen. Bagaimana untuk yang lain? Ketika mahasiswa mencoba menjelaskan untuk barisan-barisan bilangan real yang lain tentu mahasiswa melakukan generalisasi pengetahuaannya sampai diperoleh kesimpulan bahwa memang semua barisan konvergen memenuhi definisi formal barisan konvergen. Kesimpulan atau keyakinan tersebut adalah suatu bentuk pemahaman mahasiswa terhadao definisi formal barisan konvergen.

Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan divergen ke ∞ jika dan hanya jika untuk setiap $\alpha \in \boldsymbol{R}$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $a_n > \alpha$. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan divergen ke $-\infty$ jika dan hanya jika untuk setiap $\beta \in \boldsymbol{R}$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $a_n < \beta$. Berikut diberikan contoh visualisasi barisan divergen ke ∞ dan barisan divergen ke -∞.

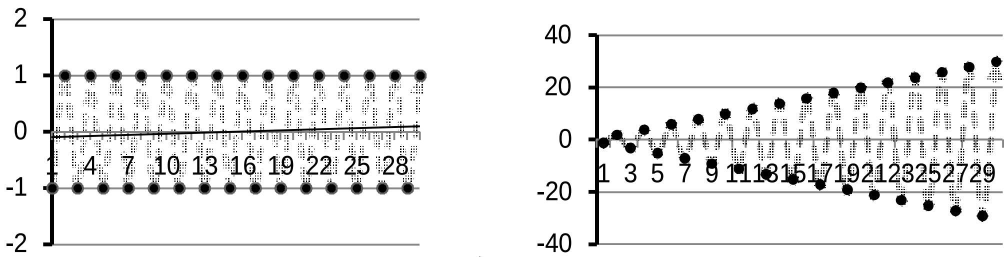
 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4



Gambar 5. Visualisasi barisan divergen ke ∞ dan barisan divergen ke -∞

Mungkin beberapa mahasiswa pada awalnya menyebut barisan divergen ke ∞ sebagai barisan yang konvergen ke ∞ dan barisan divergen ke -∞ sebagai barisan yang konvergen ke -∞. Untuk itu, perlu diingatkan kembali bahwa ∞ dan $-\infty$ bukan bilangan real sehingga barisan yang cenderung ke ∞ atau $-\infty$ tidak dapat dikatakan konvergen. Menurut Bartle, barisan seperti ini termasuk barisan divergen. Mengingat α dan β sebagai batas atas dan batas bawah suatu barisan mungkin juga menjadi masalah. Selain itu menunjukkan bahwa tidak ada α atau β juga merupakan kesulitan tersendiri bagi mahasiswa.

Barisan yang tidak divergen dan tidak konvergen ke suatu bilangan real disebut barisan oscillatori. Berikut diberikan visualisasi barisan *oscillatori*.

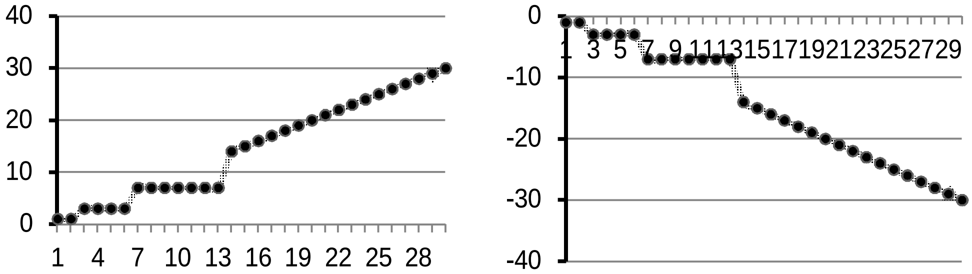


atau

Gambar 6. Visualisasi barisan *oscillatori*

Perlu dijelaskan bahwa jejak garis hanya untuk membantu melihat sifat osillatori yang ada. Mencari alasan mengapa barisan tersebut tidak divergen atau tidak konvergen juga menjadi kesulitan tersendiri. Dalam buku acuan Bartle, barisan osillatori termasuk barisan divergen.

Ditinjau dari kedudukan antar anggotanya dikenal barisan monoton naik, monoton turun, naik tegas, turun tegas, dan konstan. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan monoton naik jika dan hanya jika $a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan monoton turun jika dan hanya jika $a_n \geq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Berikut berturut-turut diberikan visualisasi barisan monoton naik dan barisan monoton turun.

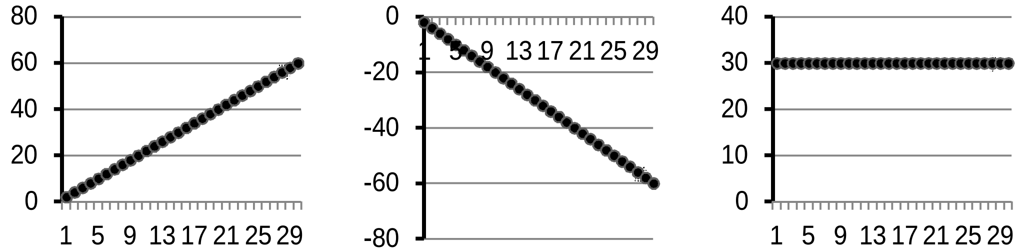


Gambar 7. Visualisasi barisan monoton naik dan barisan monoton turun

Barisan monoton naik sering disebut barisan tidak turun. Barisan monton turun sering juga disebut barisan tidak naik.

Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan naik tegas jika dan hanya jika $a_n < a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan turun tegas jika dan hanya jika $a_n > a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan konstan jika dan hanya jika $a_n = k$ dengan $k \in \boldsymbol{R}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Berikut berturut-turut diberikan visualisasi barisan naik tegas, turun tegas, dan konstan.

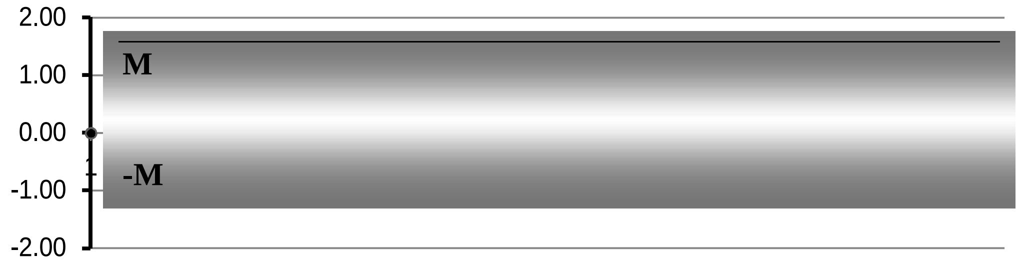
ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4



Gambar 8. Visualisasi barisan naik tegas, turun tegas, dan konstan

Suatu barisan dikatakan naik tegas jika kedudukan anggota berikutnya selalu naik. Suatu barisan dikatakan turun tegas jika kedudukan anggota berikutnya selalu turun. Suatu barisan dikatakan konstan jika kedudukan anggotanya tetap. Suatu barisan dikatakan monoton jika dan hanya jika barisan tersebut monoton naik atau monoton turun. Barisan konstan termasuk barisan monoton.

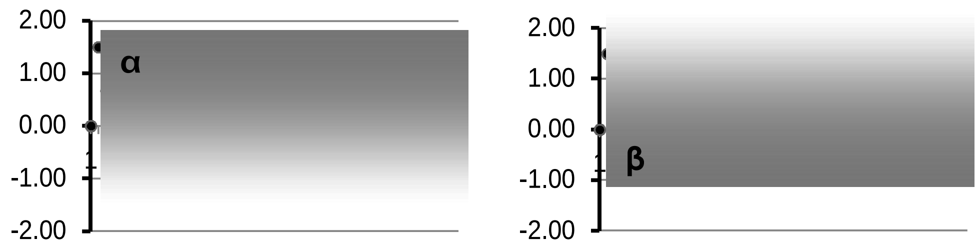
Ditinjau dari eksistensi batasnya dikenal barisan terbatas di atas, terbatas di bawah, dan terbatas. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat $M \in \boldsymbol{R}$ dengan $M > 0$ sehingga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Berikut diberikan visualisasi barisan terbatas.



Gambar 9. Visualisasi barisan terbatas

Mahasiswa harus menunjukkan bahwa semua anggota barisan berada antara M dan –M. Beberapa mahasiswa mungkin akan menyebut daerah yang diarsir dengan pita M. Menunjukkan nilai-nilai M yang memenuhi dan yang tidak memenuhi sehingga suatu barisan dapat dikatakan terbatas atau tidak terbatas dapat menjadi kesulitan tersediri.

Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan terbatas di atas jika dan hanya jika terdapat $\alpha \in \boldsymbol{R}$ sehingga $a_n \leq \alpha$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan terbatas di bawah jika dan hanya jika terdapat $\beta \in \boldsymbol{R}$ sehingga $a_n \geq \beta$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$. Berikut berturut-turut diberikan contoh visualisasi barisan terbatas di atas dan barisan terbatas di bawah.



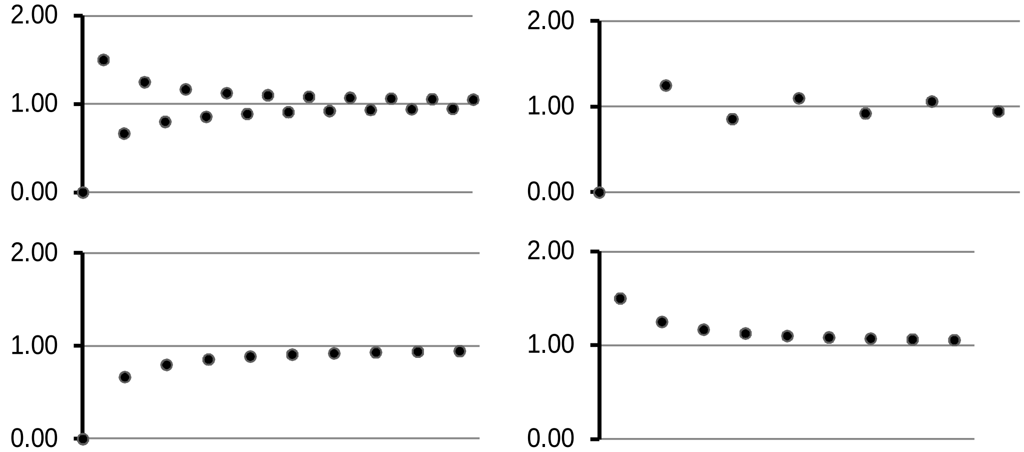
Gambar 10. Visualisasi barisan terbatas di atas dan barisan terbatas di bawah

Selain kemampuan menggambarkan barisan, mahasiswa dituntut dapat menemukan batas atas α atau batas bawah β. Untuk barisan terbatas di atas, tidak ada anggota barisan yang di atas batas atas α. Untuk barisan terbats di bawah, tidak ada anggota barisan yang di bawah batas bawah β. Dengan memahami seperti itu, dimungkinkan mahasiswa memperoleh definisi lain dari barisan terbatas yaitu bahwa suatu barisan dikatakan terbatas jika dan hanya jika memiliki batas atas α dan batas bawah β.

Ditinjau dari keanggotaan, penemu, dan sifatnya, dikenal istilah subbarisan, barisan Cauchy, dan barisan menyusut. Barisan $\{a_{n_k}\}_{n_k\geq 1}$ dikatakan subbarisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ jika dan hanya

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

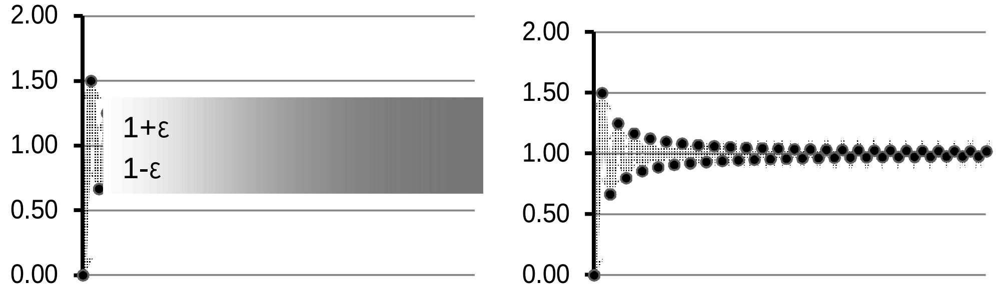
jika $\{a_{n_k}\}_{n_k \geq 1} \subseteq \{a_n\}_{n \geq 1}$. Gambar-gambar berikut adalah visualisasi dari contoh-contoh subbarisan $\left\{1 + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{n}\right)\right\}_{n \geq 1}$.



Gambar 11. Visualisasi contoh-contoh subbarisan

Anggota-anggota dari subbarisan $\{a_{n_k}\}_{n_k \geq 1}$ merupakan anggota-anggota dari barisan induknya $\{a_n\}_{n \geq 1}$. Subbarisan dapat berupa ekor dari barisan induknya.

Barisan $\{a_n\}_{n \geq 1}$ dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ dengan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk $n, m \geq n_0$ berlaku $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Barisan $\{a_n\}_{n \geq 1}$ dikatakan barisan menyusut jika dan hanya jika terdapat $C \in \boldsymbol{R}$ dengan $0 < C < 1$ sehingga berlaku $|a_{n+1} - a_{m+1}| < C|a_n - a_m|$. Berikut berturut-turut diberikan visualisasi barisan Cauchy dan barisan menyusut.



Gambar 12. Visualisasi barisan Cauchy dan barisan menyusut

Pada acuan yang berbeda dimungkinkan memiliki istilah dan definisi dengan pendekatan yang berbeda pula.

C. Kesimpulan

Ciri berpikir visual adalah menggunakan gambar/grafik untuk menjelaskan dan memahami definisi formal yang diberikan. Tiap individu mungkin mempunyai cara sendiri-sendiri untuk menjelaskannya. Menjelaskan dengan gambar/grafik merupakan reprentasi ketika berpikir visual. Kemampuan menggambar grafik barisan bilangan real sebagai fungsi merupakan syarat mutlak untuk dapat membuat visualisasi dengan tepat. Perbedaan definisi formal juga akan mempengaruhi dalam memvisualisasi. Berdasarkan analisis lebih lanjut terhadap kesulitan memvisualisasi definisi formal pada barisan bilangan real, diperoleh tingkat kesulitan sebagai berikut.

Tingkat	Topik	Definisi Formal	Jenis Kesulitan
1	Barisan konstan	Barisan $\{a_n\}_{n \geq 1}$ dikatakan konstan jika dan hanya jika $a_n = k$ dengan $k \in \boldsymbol{R}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan k sesuai konsep • Menggeneralisasi

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Tingkat	Topik	Definisi Formal	Jenis Kesulitan
			• Menarik kesimpulan
	Barisan naik tegas	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan naik tegas jika dan hanya jika $a_n < a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan $<$ sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan turun tegas	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan turun tegas jika dan hanya jika $a_n > a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan $>$ sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan monoton naik	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan monoton naik jika dan hanya jika $a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan $\leq$ sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan monoton turun	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan monoton turun jika dan hanya jika $a_n \geq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan $\geq$ sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan bagian	Barisan $\{a_{n_k}\}_{n_k\geq 1}$ dikatakan subbarisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ jika dan hanya jika $\{a_{n_k}\}_{n_k\geq 1} \subseteq \{a_n\}_{n\geq 1}$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan $\subseteq$ sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
2	Barisan terbatas di atas	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan terbatas di atas jika dan hanya jika terdapat $\alpha \in \boldsymbol{R}$ sehingga $a_n \leq \alpha$ untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan α sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan terbatas di bawah	Barisan { } $_{\geq 1}$ dikatakan terbatas di bawah jika dan hanya jika terdapat ∈ sehingga ≥ untuk setiap ∈	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan terbatas	Barisan { } $_{\geq 1}$ dikatakan terbatas jika hanya jika terdapat ∈ dengan > 0 sehingga | | ≤ untuk setiap ∈	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
3	Barisan divergen ke ∞	Barisan { } $_{\geq 1}$ dikatakan divergen ke ∞ jika dan hanya jika untuk setiap ∈ terdapat $_0$ ∈ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $a_n > \alpha$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan α • Menjelaskan tidak ada α • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan divergen ke -∞	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan divergen ke $-\infty$ jika dan hanya jika untuk setiap $\beta \in \boldsymbol{R}$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $a_n < \beta$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan β • Menjelaskan tidak ada β • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Tingkat	Topik	Definisi Formal	Jenis Kesulitan
	Barisan konvergen	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan konvergen jika dan hanya jika terdapat $a \in \boldsymbol{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ dengan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $\|a_n -$ $a<\varepsilon$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan a • Menjelaskan ε • Menjelaskan n_0 • Menjelaskan $n \geq n_0$ • Menjelaskan a_{n_0}, a_n • Menjelaskan $a_n - a$ • Menjelaskan $\|a_n - a\|$ • Menjelaskan $\|a_n - a\| < \varepsilon$ • Menjelaskan sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan Chaucy	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ dengan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sehingga untuk $n, m \geq n_0$ berlaku $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan ε • Menjelaskan n_0 • Menjelaskan $n, m \geq n_0$ • Menjelaskan a_{n_0}, a_n, a_m • Menjelaskan $a_n - a_m$ • Menjelaskan $\|a_n - a_m\|$ • Menjelaskan $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$ • Menjelaskan sesuai konsep • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan
	Barisan menyusut	Barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dikatakan barisan menyusut jika dan hanya jika terdapat $C \in \boldsymbol{R}$ dengan $0 < C < 1$ sehingga untuk $n, m \in \boldsymbol{N}$ berlaku $\|a_{n+1} -$ $am+1<Can-am$	• Memberi contoh • Mengambarkannya • Menjelaskan a_{n_0}, a_n, a_m, a_{n+1}, dan a_{m+1} • Menjelaskan $a_n - a_m$ dan $a_{n+1} - a_{m+1}$ • Menjelaskan $\|a_n - a_m\|$ dan $\|a_{n+1} - a_{m+1}\|$ • Menjelaskan C dan $C\|a_n - a_m\|$ • Menjelaskan $\|a_{n+1} - a_{m+1}\| < C\|a_n - a_m\|$ • Menjelaskan sifat menyusut • Menggeneralisasi • Menarik kesimpulan

Barisan *oscillatory* adalah barisan yang tidak divergen atau tidak konvergen ke suatu bilangan real. Definisi formal untuk barisan oscillatory belum ada atau belum ditemukan, namun dapat dipahami dengan memahami definisi formal dari barisan divergen dan barisan konvergen.

Materi pembelajaran barisan bilangan real sudah sistematis, namun kurang memperhatikan tingkat kesulitan belajar. Belajar sebaiknya sesuai dengan tingkat kesulitan belajar sehingga mahasiswa dapat merasakan tantangan yang ada. Hasil analisis ini mungkin dapat digunakan sebagai acuan dalam pembelajaran barisan bilangan real. Berdasarkan analisis di atas maka dalam pembelajaran barisan bilangan real dapat dimulai dari tahap pertama yaitu: barisan konstan, barisan naik tegas, barisan turun tegas, barisan monoton naik, barisan monoton turun, sub barisan; tahap kedua yaitu: barisan terbatas di atas, barisan terbatas di bawah, dan barisan terbatas; tahap ketiga yaitu: barisan divergen ke ∞, barisan divergen ke - ∞, barisan konvergen, barisan Chaucy, dan barisan menyusut. Untuk memperjelas pemahaman mahasiswa tentang barisan bilangan real seluruhnya sebaiknya diberikan skemanya.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R G & Sherbert D R. 1982. *Introduction to Real Analisis.* University of Illinois: Urbana-Champaign. Illinois. John Wiley & Sons. Inc

Darmadi. 2008a. *Analisis Real Menurut Mahasiswa*. Laporan Penelitian Tahun 2008. IKIP PGRI Madiun. Penelitian tidak dipublikasikan

_______. 2008b. "Spektrum Hasil Belajar Analisis Real Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika IKIP PGRI Madiun Tahun Akademik 2008/2009". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNY, Jogjakarta, 5 Desember 2009.

_______. 2008c. "Pengaruh Pemanfaatan Powerpoint dalam Pembelajaran Terhadap Prestasi Belajar Matematika Tingkat Sekolah Dasar Ditinjau dari Gaya Belajar Siswa". Tesis Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret.

_______. 2009a. "Pengembangan Model Pembelajaran Analisis Real Berbasis Teori David Tall". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNESA, Surabya, 8 Agustus 2009

_______. 2009b. *Persiapan Mahasiswa Sebelum Kuliah*. Laporan Penelitian Tahun 2009. IKIP PGRI Madiun

_______. 2009c. "Spektrum Hasil Belajar Kalkulus Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika IKIP PGRI Madiun Tahun Akademik 2008/2009". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNNES, Semarang, 24 Oktober 2009

_______. 2010. "Perbaikan Kualitas Perkuliahan Analisis Real Melalui Lesson Study". Makalah disajikan pada Seminar Hasil Lesson Study FP MIPA IKIP PGRI Madiun

_______. 2011a. "Berpikir Analitis, Kreatif, Kritis, dan Inovatif dalam Pembelajaran Analisis Real Ditinjau dari Taksonomi Bloom". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNESA, Surabaya, 22 Oktober 2011

_______. 2011b. "Imajeri Mahasiswa Dalam Pembelajaran Analisis Real (Studi Kasus Di IKIP PGRI MADIUN)". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNY, Jogjakarta, 3 Desember 2011

_______. 2012a. "Membangun Pembelajaran Matematika yang Menyenangkan dengan Visualisasi". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNY, Jogjakarta, 24 Maret 2012

_______. 2012b. "Visualisasi Definisi-Definisi Formal pada Barisan Bilangan Real". Makalah disajikan pada Seminar Nasional UNNES, Semarang, 26 Mei 2012

Goldberg, R R. 1976. *Methods of Real Analysis.* The University of Lowa. United State of America. John Wiley & Sons, Inc

Wasan S K & Prakash R. Ramjas College: *Real Analysis.* University of Delhi; Rajdhani College. University of Delhi. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publising Company Limited